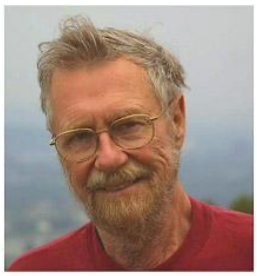
本节内容

最短路径

Dijkstra算法

迪杰斯特拉

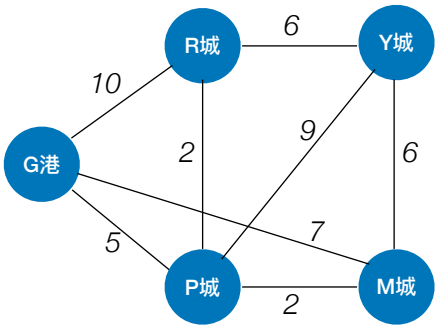


艾兹格·W·迪杰斯特拉
Edsger Wybe Dijkstra
(1930~2002)

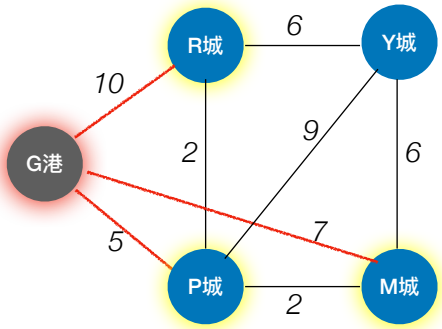
1972年图灵奖得主

- **提出“goto 有害理论”——操作系统，虚拟存储技术**
- **信号量机制PV原语——操作系统，进程同步**
- **银行家算法——操作系统，死锁**
- **解决哲学家进餐问题——操作系统，死锁**
- **Dijkstra最短路径算法——数据结构大题、小题**

BFS算法的局限性

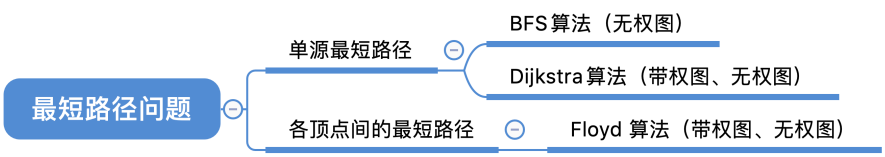


BFS算法的局限性

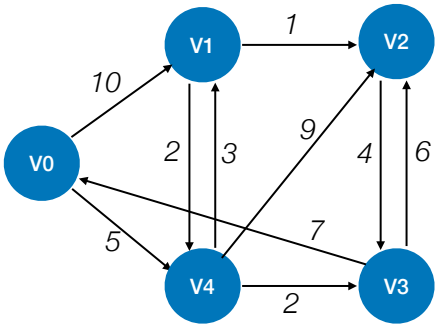


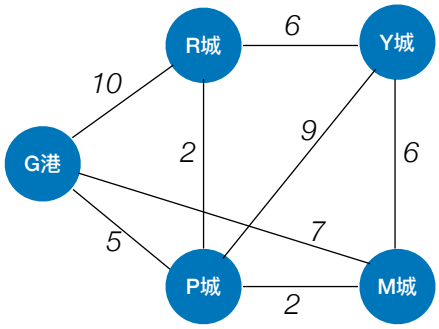
带权路径长度——当图是带权图时，一条路径上所有边的权值之和，称为该路径的带权路径长度

BFS算法求单源最短路径只适用于无权图，或所有边的权值都相同的图

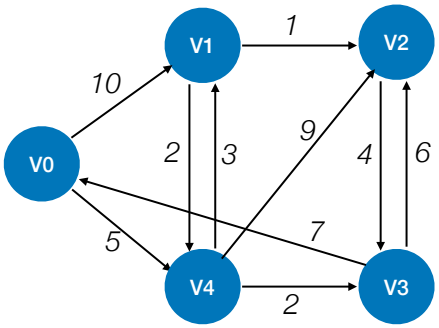


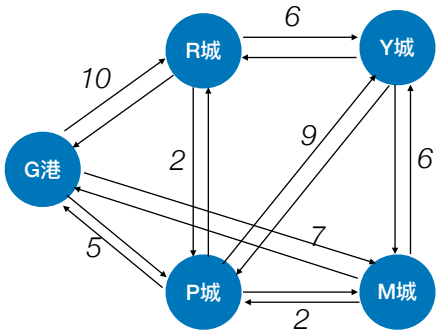
Dijkstra算法



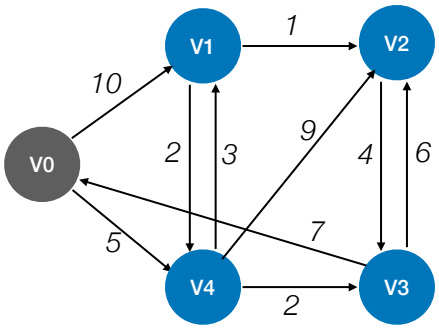


Dijkstra算法





Dijkstra算法



初始：从V_0开始，初始化三个数组信息如下👇

标记各顶点是否已找到最短路径

final[5]

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✗

最短路径长度

dist[5]

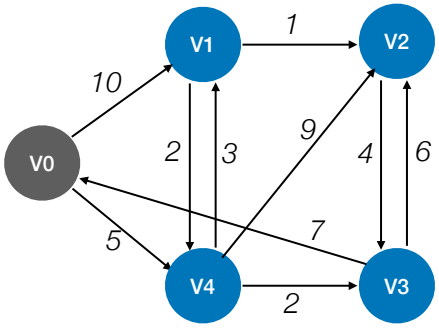
0	10	∞	∞	5

路径上的前驱

path[5]

-1	0	-1	-1	0

Dijkstra算法



第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

final[5]

V0	V1	V2	V3	V4
✓	✗	✗	✗	✗

最短路径长度

dist[5]

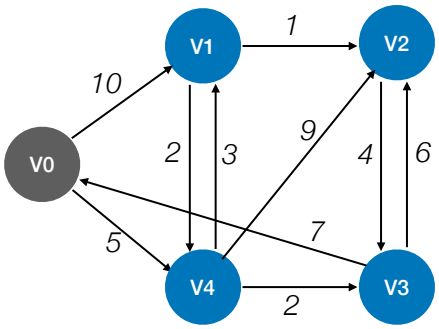
0	10	∞	∞	5

路径上的前驱

path[5]

-1	0	-1	-1	0

Dijkstra算法



第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

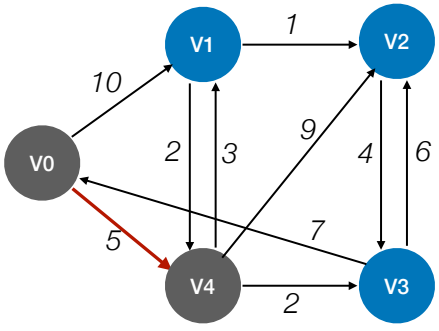
标记各顶点是否已找到最短路径

最短路径长度

路径上的前驱

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✗
dist[5]	0	10	∞	∞	5
path[5]	-1	0	-1	-1	0

Dijkstra算法



第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

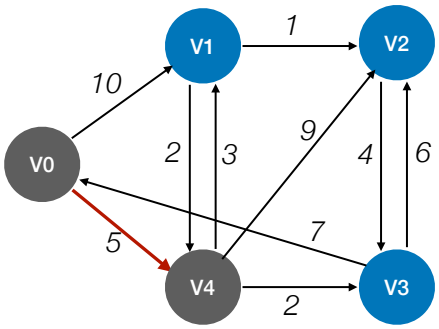
标记各顶点是否已找到最短路径

最短路径长度

路径上的前驱

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✓
dist[5]	0	10	∞	∞	5
path[5]	-1	0	-1	-1	0

Dijkstra算法



第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✓

最短路径长度

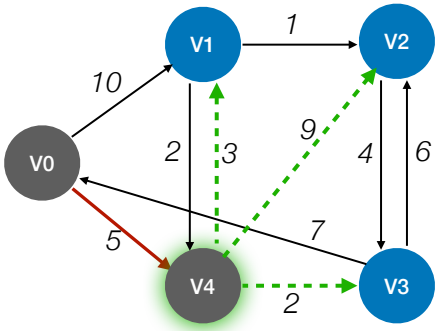
dist[5]	0	10	∞	∞	5

路径上的前驱

path[5]	-1	0	-1	-1	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法



第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✓

最短路径长度

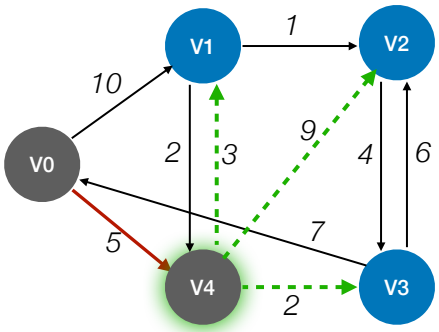
dist[5]	0	10	∞	∞	5

路径上的前驱

path[5]	-1	0	-1	-1	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法



第1轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✓

最短路径长度

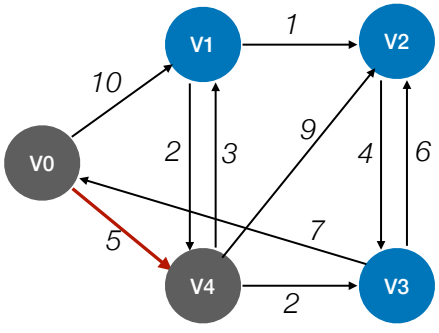
dist[5]	0	8	14	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	4	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法



第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✓

最短路径长度

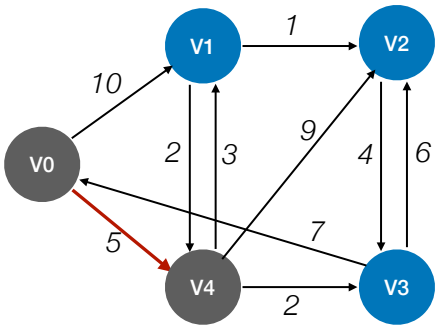
dist[5]	0	8	14	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	4	4	0

Dijkstra算法

第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。



标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✓

最短路径长度

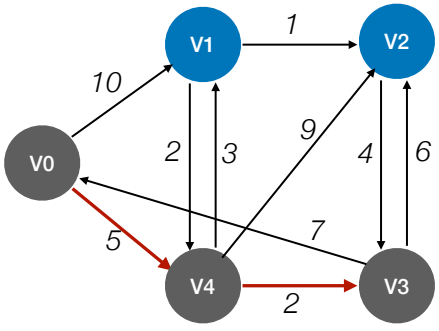
dist[5]	0	8	14	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	4	4	0

Dijkstra算法

第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。



标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✓	✓

最短路径长度

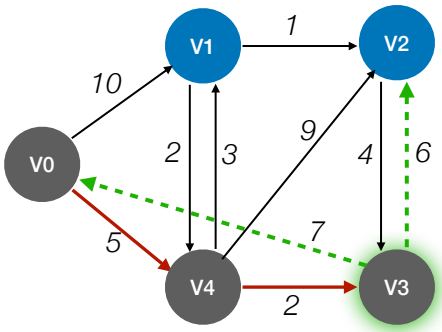
dist[5]	0	8	14	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	4	4	0

王道考研/CSKAOYAN.COM

Dijkstra算法



第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✓	✓

最短路径长度

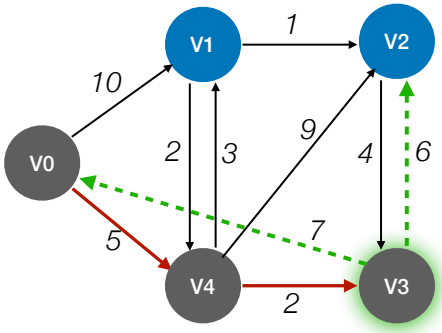
dist[5]	0	8	14	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	4	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法



第2轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✓	✓

最短路径长度

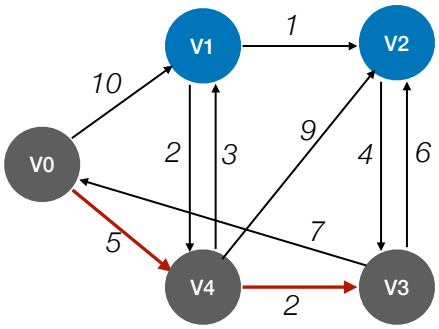
dist[5]	0	8	13	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	3	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法



第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✓	✓

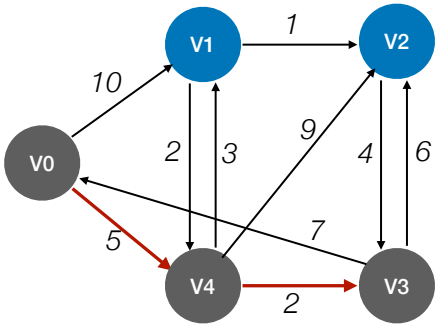
最短路径长度

dist[5]	0	8	13	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	3	4	0

Dijkstra算法



第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✓	✓

最短路径长度

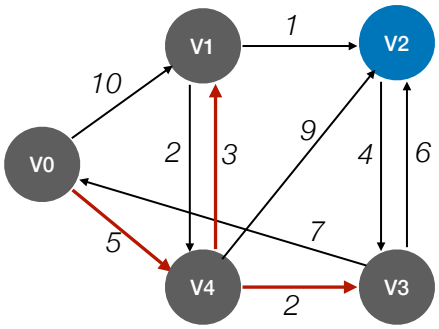
dist[5]	0	8	13	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	3	4	0

王道考研/CSKAOYAN.COM

Dijkstra算法



第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✗	✓	✓

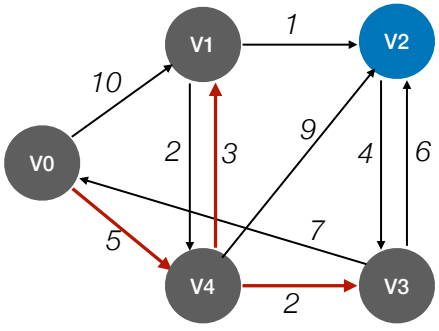
最短路径长度

dist[5]	0	8	13	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	3	4	0

Dijkstra算法



第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✗	✓	✓

最短路径长度

dist[5]	0	8	13	7	5

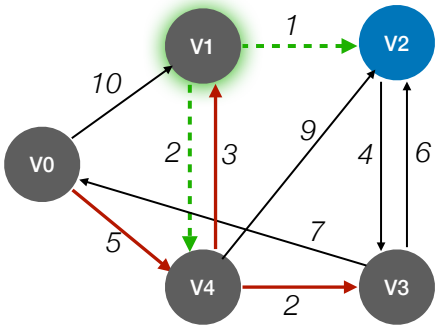
路径上的前驱

path[5]	-1	4	3	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

王道考研/CSKAOYAN.COM

Dijkstra算法



第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✗	✓	✓

最短路径长度

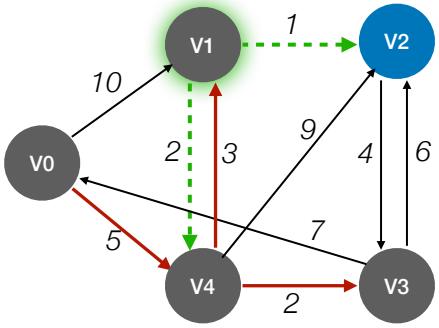
dist[5]	0	8	13	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	3	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法



第3轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✗	✓	✓

最短路径长度

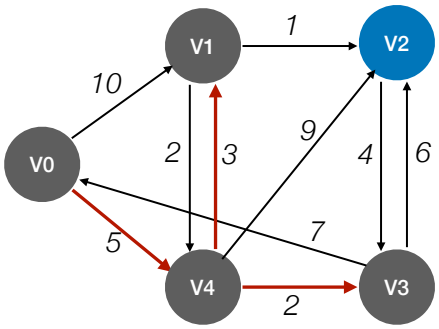
dist[5]	0	8	9	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	1	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

Dijkstra算法



第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✗	✓	✓

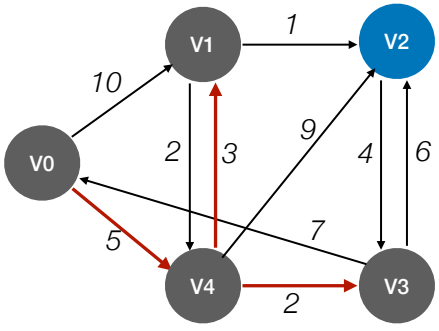
最短路径长度

dist[5]	0	8	9	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	1	4	0

Dijkstra算法



第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✗	✓	✓

最短路径长度

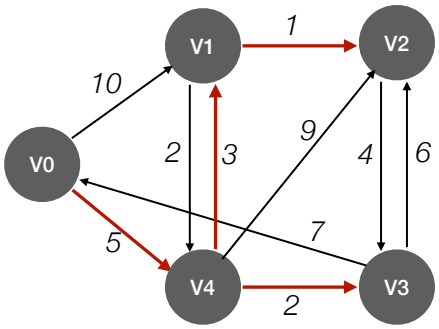
dist[5]	0	8	9	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	1	4	0

王道考研/CSKAOYAN.COM

Dijkstra算法



第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✓	✓	✓

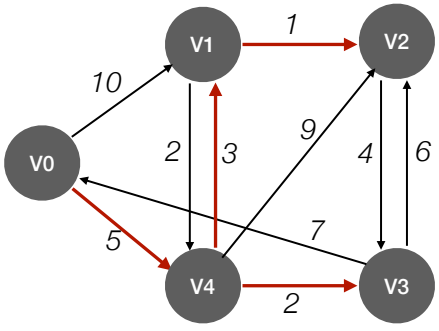
最短路径长度

dist[5]	0	8	9	7	5

路径上的前驱

path[5]	-1	4	1	4	0

Dijkstra算法



第4轮：循环遍历所有结点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。

标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✓	✓	✓

最短路径长度

dist[5]	0	8	9	7	5

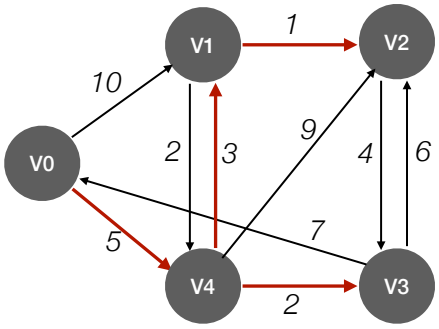
路径上的前驱

path[5]	-1	4	1	4	0

检查所有邻接自 V_i 的顶点，若其 final 值为false，则更新 dist 和 path 信息

王道考研/CSKAOYAN.COM

如何使用数组信息?



标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✓	✓	✓	✓

最短路径长度

dist[5]	0	8	9	7	5

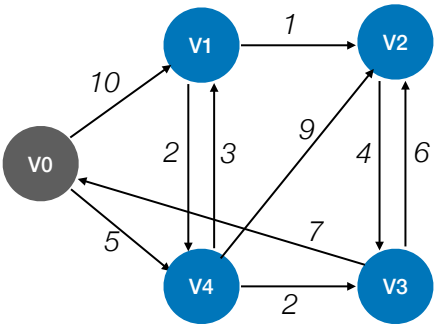
路径上的前驱

path[5]	-1	4	1	4	0

V0到V2 的最短(带权)路径长度为：dist[2] = 9

通过 path[ ] 可知，V0到V2 的最短(带权)路径：V2 <— — V1 <— — V4 <— — V0

Dijkstra算法的时间复杂度



标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2	V3	V4
final[5]	✓	✗	✗	✗	✗

最短路径长度

dist[5]	0	10	∞	∞	5

路径上的前驱

path[5]	-1	0	-1	-1	0

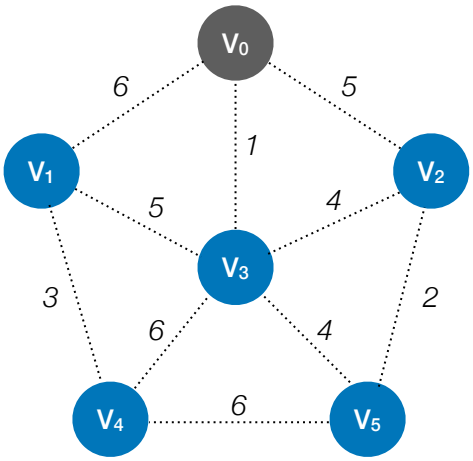
初始：若从V_0开始，令 final[0]=ture; dist[0]=0; path[0]=-1。
其余顶点final[k]=false; dist[k]=arcs[0][k]; path[k]= (arcs[0][k]==∞) ? -1 : 0

时间复杂度：$O(n^2)$即$O(|V|^2)$

n-1轮处理：循环遍历所有顶点，找到还没确定最短路径，且dist 最小的顶点V_i，令final[i]=ture。并检查所有邻接自V_i的顶点，对于邻接自V_i的顶点 V_j，若 final[j]==false 且 dist[i]+arcs[i][j] < dist[j]，则令 dist[j]=dist[i]+arcs[i][j]; path[j]=i。（注：arcs[i][j]表示V_i到V_j的弧的权值）

对比：Prim 算法的实现思想

总时间复杂度 $O(n^2)$，即$O(|V|^2)$



从V_0开始，总共需要 n-1 轮处理

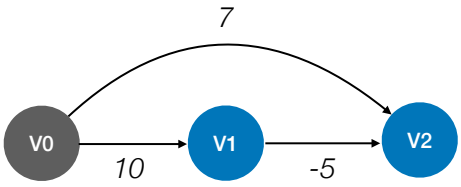
每一轮处理：循环遍历所有个结点，找到lowCost最低的，且还没加入树的顶点。

每一轮时间复杂度O(2n)

再次循环遍历，更新还没加入的各个顶点的lowCost值

	V0	V1	V2	V3	V4	V5
isJoin[6]	✓	✗	✗	✗	✗	✗
lowCost[6]	0	6	5	1	∞	∞

用于负权值带权图



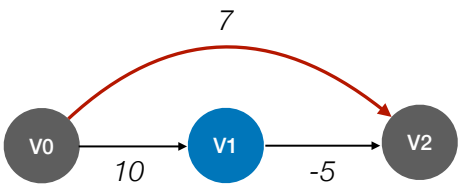
标记各顶点是否已找到最短路径

最短路径长度

路径上的前驱

	V0	V1	V2
final[3]	✓	✗	✗
dist[3]	0	10	7
path[3]	-1	0	0

用于负权值带权图



标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2
final[3]	✓	✗	✓

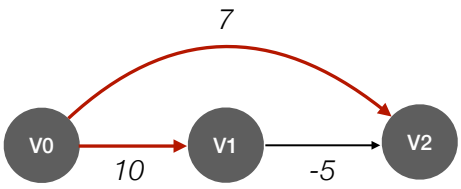
最短路径长度

dist[3]	0	10	7

路径上的前驱

path[3]	-1	0	0

用于负权值带权图



标记各顶点是否已找到最短路径

	V0	V1	V2
final[3]	✓	✓	✓

最短路径长度

dist[3]	0	10	7

路径上的前驱

path[3]	-1	0	0

事实上V0到V2 的最短带权路径长度为 5

结论：Dijkstra 算法不适用于有负权值的带权图